ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS ΜΕ ΜΕΡΙΚΗ ΟΔΗΓΗΣΗ:

$$\begin{bmatrix} a_{rr}^{(r)} & a_{r,r+1}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} \\ a_{r+1,r}^{(r)} & a_{r+1,r+1}^{(r)} & \dots & a_{r+1,n}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nr}^{(r)} & a_{n,r+1}^{(r)} & \dots & a_{nn}^{(r)} \end{bmatrix} = \tilde{A}^{(r)}, \qquad \tilde{b}^{(r)} = \begin{bmatrix} b_r^{(r)} \\ b_{r+1}^{(r)} \\ \vdots \\ b_n^{(r)} \end{bmatrix}$$

Κατά τη διαδικασία της r απαλοιφής έχουμε τον υποπίνακα $\tilde{A}^{(r)}$ και το υποδιάνυσμα $\tilde{b}^{(r)}$. Αλλάζουμε την r γραμμή με την k έτσι ώστε: $|a_{kr}^{(r)}| = \max_i |a_{ir}^{(r)}|$ τότε όλοι οι πολλαπλασιαστές θα είναι <1.

πχ

Να λυθεί το σύστημα μέσω μερικής οδήγησης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$4x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

Λύση

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - \frac{1}{4}\gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_1} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Max

$$\xrightarrow{\gamma_3 \to \gamma_3 - \frac{1}{2}\gamma_2} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad x^T = [1, -1, 1]$$

Για το ίδιο σύστημα τώρα μπορούμε επίσης

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

με οδηγό την 3η γραμμή έχουμε $i = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Δηλαδή δεν αλλάζω την 3η γραμμή με την 1η

LU-ΑΝΑΛΥΣΗ για το ίδιο σύστημα

$i = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A' = P A = LU$

Άρα, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Νόρμες Διανυσμάτων

Έστω ένας γραμμικός χώρος X στο $\mathbb{R}$

Η απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, $x \to \|x\|$

Είναι νόρμα αν ισχύουν:

(i) $x \in X$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(iii) $x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική)

Ιδιοτητες:

- $0=\|0\|=\|x-x\|=\|x+(-x)\|\leq\|x\|+\|-x\|=2\|x\|\Rightarrow\|x\|\geq 0$

- $\|x\|=\|x-y+y\|\leq\|x-y\|+\|y\|\Rightarrow\|x\|-\|y\|\leq\|x-y\|$
  ομοιως εχουμε $\|y\|-\|x\|\leq\|y-x\|=\|x-y\|$

Τρεις βασικές νόρμες στον $\mathbb{R}^n$

l_1 νόρμα : $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

l_2-νόρμα : $\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}$ ευκλειδεια νόρμα

$\vdots$

l_∞-νόρμα : $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|$

Είναι ειδικές περιπτώσεις της κατηγορίας

l_p-νορμα : $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$, $p\geq 1$

Αποδεικνύεται οτι $\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$

Δύο Νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ λεγονται ισοδυναμες (ή συγκρισιμες) αν υπαρχουν θετικοί πραγματικοί m και M τω:

$\forall x\in\mathbb{R}^n$: $m\|x\|\leq\|x\|'\leq M\cdot\|x\|$, με $m\leq M$

οπου $\frac{1}{M}\|x\|'\leq\|x\|\leq\frac{1}{m}\cdot\|x\|'$

Ολες οι νόρμες στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες

Ορισμος:

Η ακολουθια διανυσμάτων $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει στο διανυσμα $x^{(m)}\to x$ ή $\lim\limits_{m\to\infty}x^{(m)}=x$ αν η ακολουθια $\|x^{(m)}-x\|\to 0$ ή $\lim\limits_{m\to\infty}\|x^{(m)}-x\|=0$

Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$

Είναι η απεικόνιση $(\cdot,\cdot)_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(x,y)_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $\left[\text{όπου } (x,x)_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|_2^2\right]$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ CAUCHY-SCHWARTZ

$$|(x,y)_2| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

ΝΟΡΜΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Η απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ είναι νορμα αν

i) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\|A\| = 0 \iff A = \mathbb{O}$

ii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$

iii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

iv) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Μας ενδιαφέρει μια κατηγορία νορμών που παράγονται απο νόρμες διανυσματων, οι φυσικές νορμες

Φυσική νορμα $\|\cdot\|$ πίνακα παραγόμενη απο $\|\cdot\|$ διανύσματος είναι

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Γενικα, για καθε φυσική νόρμα, ισχυει:

$\rho(A) \leq \|A\|$, $\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} \{ |\lambda_i| : A x_i = \lambda_i x_i \}$

$\|Ax_i\| = \|\lambda_i x_i\| \Rightarrow \|A\| \cdot \|x_i\| \geq \|Ax_i\| = |\lambda_i| \|x_i\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|A\| \geq |\lambda_i| \quad \forall i = 1,2,\dots,n \Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|$.

Βασικές νορμες

l_1-νόρμα : $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

l_∞-νόρμα : $\|A\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

l_2-νόρμα : $\|A\|_2 = \left(\rho(A^T A)\right)^{1/2}$

Επαναληπτικές Μέθοδοι

Βασίζονται στην κατασκευή μιας ακολουθίας διανυσμάτων $(x^{(m)})$ η οποία αν συγκλίνει, θα συγκλίνει στη λύση x του $Ax=b$.
Θα μελετήσουμε τις μεθόδους Jacobi και Gauss-Seidel

Έστω τώρα το γραμμικό σύστημα $Ax=b$ απαραίτητη προϋπόθεση είναι $a_{ii} \neq 0$, $i=1,2,\dots,n$ βασίζονται στην αναδιάταξη του συστήματος λύνοντας την i εξίσωση ως προς x_i με:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right]$$

μας οδηγεί στην ακολουθία $(x^{(m)})$

Jacobi

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right] \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots n \\ m=0,1,2,\dots \end{matrix}$$

με $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τυχόν

Gauss-Seidel

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=1+i}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(m)} \right]$$

$i=1,2,\dots n$
$m=0,1,2,\dots$

με $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τυχόν